
Feuille 4 : Corps locaux

Exercice 1. 1. Calculer la limite de $\frac{n!}{n!+1}$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout premier p .

2. On note p_n le n -ème nombre premier, et $p_\infty = \infty$. On se donne une famille $a_n \in \mathbb{Z}_{p_n}$, et on pose $a_\infty = 0$. Construire une suite de rationnels $z_n \in \mathbb{Q}$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, \infty\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a_i|_{p_i} = 0$ (on pourra utiliser la suite $y_n = 1 + \prod_{i=1}^n p_i^{n+1}$).

Exercice 2 (Lemme de Hensel). Soit A un anneau de valuation discrète complet, et $f \in A[x]$. On suppose que $a_0 \in A$ et qu'il existe $\varepsilon < 1$ tel que $|f(a_0)| \leq \varepsilon |f'(a_0)|^2$ avec $f'(a_0) \neq 0$. On considère la suite

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

1. Montrer que $a_n \in A$, $|f'(a_n)| = |f'(a_0)|$ et $|f(a_n)| \leq \varepsilon^{2^n} |f'(a_0)|^2$.
2. Montrer que a_n converge vers une racine $a \in A$ de f qui vérifie

$$|a - a_0| \leq \varepsilon |f'(a_0)|,$$

et qu'une telle racine est unique.

Exercice 3. 1. Factoriser $x^4 - 17$ sur $\mathbb{Q}_2$.

2. Décrire la décomposition de l'idéal (2) dans l'anneau des entiers de $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17})$.

Exercice 4. Soit $K/\mathbb{Q}$ un corps de nombres de degré n .

1. Montrer que si un nombre premier $p < n$ est totalement décomposé dans l'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, ce dernier ne peut pas s'écrire sous la forme $\mathbb{Z}[\alpha]$.
2. À l'aide du polynôme $f(x) = x^3 - x + 8$, donner un exemple d'anneau d'entiers non monogène.

Exercice 5. Soit p un premier impair, on note μ_{p-1} le groupe des racines $(p-1)$ -ème de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}_p^* = p^{\mathbb{Z}} \times \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$.
2. Montrer que pour p impair, $\mathbb{Q}_p$ n'a que trois extensions quadratiques.
3. Montrer de même que $\mathbb{Q}_2$ possède 7 extensions quadratiques.

Exercice 6. 1. Pour $f > 1$ soit α un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{p^f}^*$, et soit $\bar{P}(x) = x^f + \bar{a}_1 x^{f-1} + \dots + \bar{a}_f$ son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_p$. Soient $a_i \in \mathbb{Z}_p$ des relèvements des $\bar{a}_i$, et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ une racine de $P(x) = \sum a_i x^i$. Montrer que $\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ est une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré f .

2. Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré f . Montrer que $K = \mathbb{Q}_p(\zeta)$ où ζ est une racine $(p^f - 1)$ -ème de l'unité.
3. Montrer que pour tout n , $\mathbb{Q}_p$ possède une unique extension non ramifiée de degré n . Cette extension est souvent notée $\mathbb{Q}_{p^f}$ et son anneau des entiers $\mathbb{Z}_{p^f}$.

Exercice 7. Soit K un corps local et L/K une extension finie de degré n . On note π une uniformisante de $\mathcal{O}_L$.

1. Montrer que si L/K est totalement ramifiée, alors $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi]$.
2. Montrer que si L/K est totalement ramifiée, le polynôme minimal de π est un polynôme d'Eisenstein.
3. Montrer que si α est annulé par un polynôme d'Eisenstein sur $\mathcal{O}_K$, l'extension $K(\alpha)/K$ est totalement ramifiée.

Exercice 8 (Lemme de Krasner). Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie, et $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{Q}}_p$.

1. Montrer que tout $\sigma \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(K)$ est une isométrie.
2. Montrer que si $|\alpha - \beta| < |\alpha - \alpha'|$ pour tout conjugué $\alpha' \neq \alpha$ de α , alors $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$.

Exercice 9. Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie, $A = \mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et π une uniformisante.

1. Soit $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \in A[x]$ un polynôme irréductible unitaire séparable de degré n . On écrit $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que tout polynôme unitaire $g(x) = \sum_{i=1}^n b_i x^i \in A[x]$ tel que $\max |a_i - b_i| < \delta$ s'écrit $g(x) = \prod_{i=1}^n (x - \beta_i)$ avec $|\alpha_i - \beta_i| < \varepsilon$ pour tout i .
2. Soit $E = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n \in A[x], |a_i| < 1, |a_0| = |\pi|\}$ l'ensemble des polynômes d'Eisenstein de degré n , et

$$D = \{K(\alpha), \exists f \in E, f(\alpha) = 0\}$$

l'ensemble des extensions qu'ils définissent. Montrer que D est fini (utiliser le lemme de Krasner).

Exercice 10. Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une extension finie de degré $n = ef$, où e est le degré de ramification et f le degré d'inertie.

1. On pose $E = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^f-1})$, montrer que E est la plus grande sous-extension non ramifiée de K .
2. Montrer que K/E est totalement ramifiée.
3. Montrer que $\mathbb{Q}_p$ n'a qu'un nombre fini d'extensions de degré n .